

Это задание повышенного уровня сложности. Примерное время выполнения задания 3 минуты.

Проверяемые элементы содержания:

— Знание основных понятий и законов математической логики.

Элементы содержания, проверяемые на ЕГЭ:

- высказывания,
- логические операции,
- кванторы,
- истинность высказывания.

### Задание 18

Для какого наибольшего целого числа  $A$  формула

$$((x \leq 9) \rightarrow (x \cdot x \leq A)) \wedge ((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y \leq 9))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных  $x$  и  $y$ ?

Ответ: \_\_\_\_\_

### Разбор задания

Разделим наше выражение на 2 части:

$$((x \leq 9) \rightarrow (x \cdot x \leq A)) = B$$

$$((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y \leq 9)) = C$$

получаем

**$B \wedge C$**

Главное действие в исходном выражении — это конъюнкция. Конъюнкция истинна, когда все операнды истинны. Т.е. в задаче обе части **B** и **C** должны быть истинными.

### Рассмотрим часть B:

если в выражении  $(x \leq 9)$ ,  $x > 9$ , то **часть B** будет истинна независимо от  $A$ . Значит значение числа  $A$  влияет на решение только при выполнении условия:

$$x \leq 9$$

теперь для того чтобы в **части B**, выражение было истинным, надо чтобы  $(x \cdot x \leq A)$  было истинным:

$$x \cdot x \leq A$$

(импликация  $1 \rightarrow 1 = 1$ )

таким образом получаем:

$$x \leq 9$$

$$x^2 \leq A$$

при любых  $x$

Но нам необходимо найти наибольшее возможное  $A$ , поэтому надо ограничить его значения сверху, а данная часть выражения ограничивает только снизу:

возьмем наименьшее натуральное:  $x = 1$ , тогда  **$A \geq 1$**

### Рассмотрим часть C:

если выражение  $(y \leq 9)$  действительно истинно (т.е.  $y \leq 9$ ), то **часть C** будет истинна независимо от  $A$ . Значит значение числа  $A$  влияет на решение только при выполнении условия:

$$y > 9$$

теперь для того чтобы в **части C**, выражение было истинным, надо чтобы  $(y \cdot y \leq A)$  было ложным:

$$y \cdot y > A$$

(импликация  $0 \rightarrow 0 = 1$ )

таким образом получаем:

$$y > 9$$

$$y^2 > A$$

при любых  $y$

данная часть выражения ограничивает значения  $A$  сверху:

возьмем наименьшее возможное по условию натуральное:  $y = 10$ , тогда  $A < 100$  Получаем, что

наибольшее  $A$  меньше 100 — это  **$A = 99$**

**Ответ: 99**